كلية العلوم　　　　　العام الدراسي　　　　　الأسبوع

٢٠١٥ ـ ٢٠١٦　　　　　الرقم

امتحان مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمال للسنة أولى رياضيات ـ الفصل٢

السؤال الأول (٥٠د): ليكن لدينا الدالتين التاليين :

$$F(x,y,z,w)=P(X=x,Y=y,Z=z,W=w)=a\,p^{x+y+z+w}(1-p)^{4-x-y-z-w}\ ;x,y,z,w=0,1.$$

$$f(x,y)=b.e^{-\frac{(x^2-2xy+2y^2)}{2}}\ ;x,y\in\mathbf{R}^2$$

و المطلوب : ١) احسب a ليكون التابع الأول قانون احتمالي ثم بين استقلال المتحولات و احسب ما يلي :

$$EX, VarX,\ E(X+Y+Z+W), E(X\times Y\times Z\times W), U_X(t).$$

٢) أوجد b ليكون التابع $f(x,y)$ تابع كثافة احتمالي .

٣) أوجد الكثافتين الهامشيتين للمتحولين المستمرين : X,Y ، ماذا تلاحظ ؟

٤) أوجد : $EY, VarY, E(Y^3), U_Y(t)$.

السؤال الثاني (٣٠د):

ليكن لدينا مجتمع طبيعي وسيطاه σ^2 , μ حيث أن :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\ ;x\in\mathbf{R}$$

١) قدر بطريقة الاحتمالية العظمى على أساس عينة عشوائية حجمها (n) وسيطي هذا المجتمع،

٢) قدر بطريقة العزوم و على أساس عينة عشوائية حجمها (n) وسيطي هذا المجتمع،

٣) اثبت أن تقدير الوسيط μ ، متسقاً ومتسقاً

السؤال الثالث (٢٠د):

ثلاث شركات أدوية تنتج مضاداً لفيروس زيكا في مقاطعة ما من إحدى الدول بحيث تغطيان حاجة السوق في تلك المقاطعة فإذا كانت الشركة الأولى تغطي ٣٥% من حاجة السوق

سلم درجات امتحان مقرر الجبر الخطي و مبادئ الاحتمالات و الإحصاء للسنة أولى فيزياء - ف٢ - ٢٠١٥-٢٠١٦

الجواب الأول (٥٠ د): ١) -٢×٧=١٤-

$$\sum_{x,y,z,w=0}^{1} F(x,y,z,w)=1 \Rightarrow a \sum_{x,y,z,w=0}^{1} p^{x+y+z+w}(1-p)^{4-x-y-z-w}=1 \Rightarrow a\,p^{x}(1-p)^{1-x}$$

$$.p^{y}(1-p)^{1-y}.p^{z}(1-p)^{1-z}.p^{w}(1-p)^{1-w}=1$$

$$\Rightarrow a.1.1.1.1=1 \Rightarrow a=1.$$

$$F(x,y,z,w)=p^{x}(1-p)^{1-x}.p^{y}(1-p)^{1-y}.p^{z}(1-p)^{1-z}.p^{w}(1-p)^{1-w}$$ **(indepent variables)**

$$EX=\sum_{x=0}^{1} x\,p^{x}(1-p)^{1-x}=p=EY=EZ=EW.$$

$$VarX=p(1-p),\ E(X+Y+Z+W)=4p,\ E(X\times Y\times Z\times W)=p^{4}$$

$$U_X(t)=\sum_{x=0}^{1} e^{tx}.p^{x}(1-p)^{1-x}=\sum_{x=0}^{1}(e^{t}.p)^{x}(1-p)^{1-x}=(e^{t}.p+1-p)$$

٢) إيجاد b -٨-

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow b.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y^2)}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dx\right)dy=1 \Rightarrow b.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y^2)}{2}}(\sqrt{2\pi})dy=1 \Rightarrow b(\sqrt{2\pi})(\sqrt{2\pi})=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2\pi}$$

٣) أوجد الكثافتين الهامشيتين للمتحولين المستمرين X,Y ، ماذا تلاحظ -١٢-

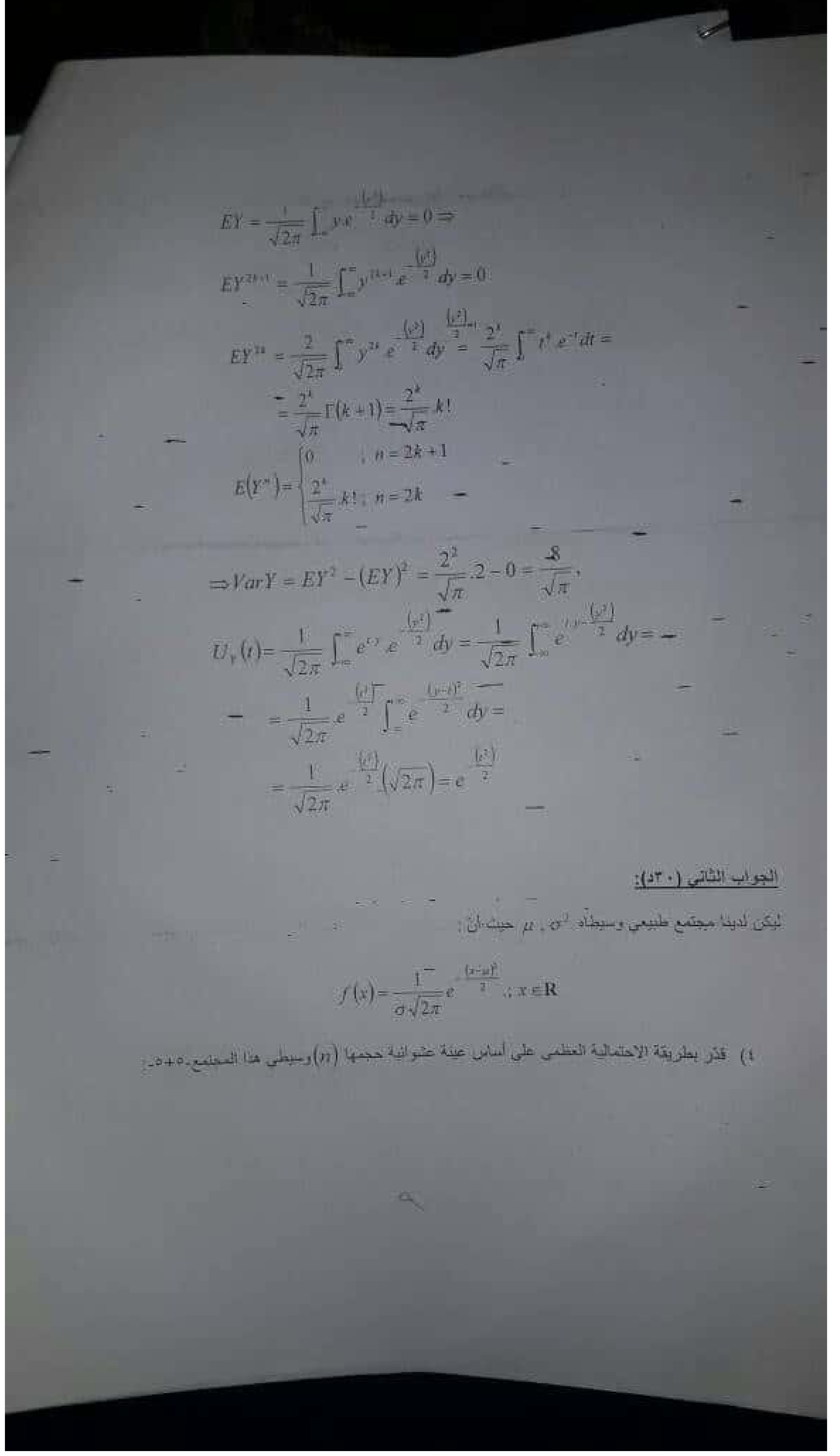
$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(e^{-\frac{(y^2)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y^2)}{2}}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x^2)}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y^2)}{2}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x^2)}{2}} \neq \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2-2xy+2y^2)}{2}}\ (they\ are\ dependent).$$

٤) -٤×٤=١٦-

القانون مع كل تطبيق والجواب في كل حالة /٤ درجات/ بينما القانون فقط درجتان في كل حالة



$$EY = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{(y^2)}{2}}\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$EY^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{2k+1} e^{-\frac{(y^2)}{2}}\, dy = 0$$

$$EY^{2k} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y^{2k} e^{-\frac{(y^2)}{2}}\, dy \overset{\frac{(y^2)}{2}=t}{=} \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} t^k e^{-t} dt =$$

$$= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k+1) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} k!$$

$$E(Y^n) = \begin{cases} 0 & ; n = 2k+1 \\ \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} k! & ; n = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow Var Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{2^2}{\sqrt{\pi}} . 2 - 0 = \frac{8}{\sqrt{\pi}},$$

$$U_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} e^{-\frac{(y^2)}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty-\frac{(y^2)}{2}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(t^2)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-t)^2}{2}}\, dy =$$

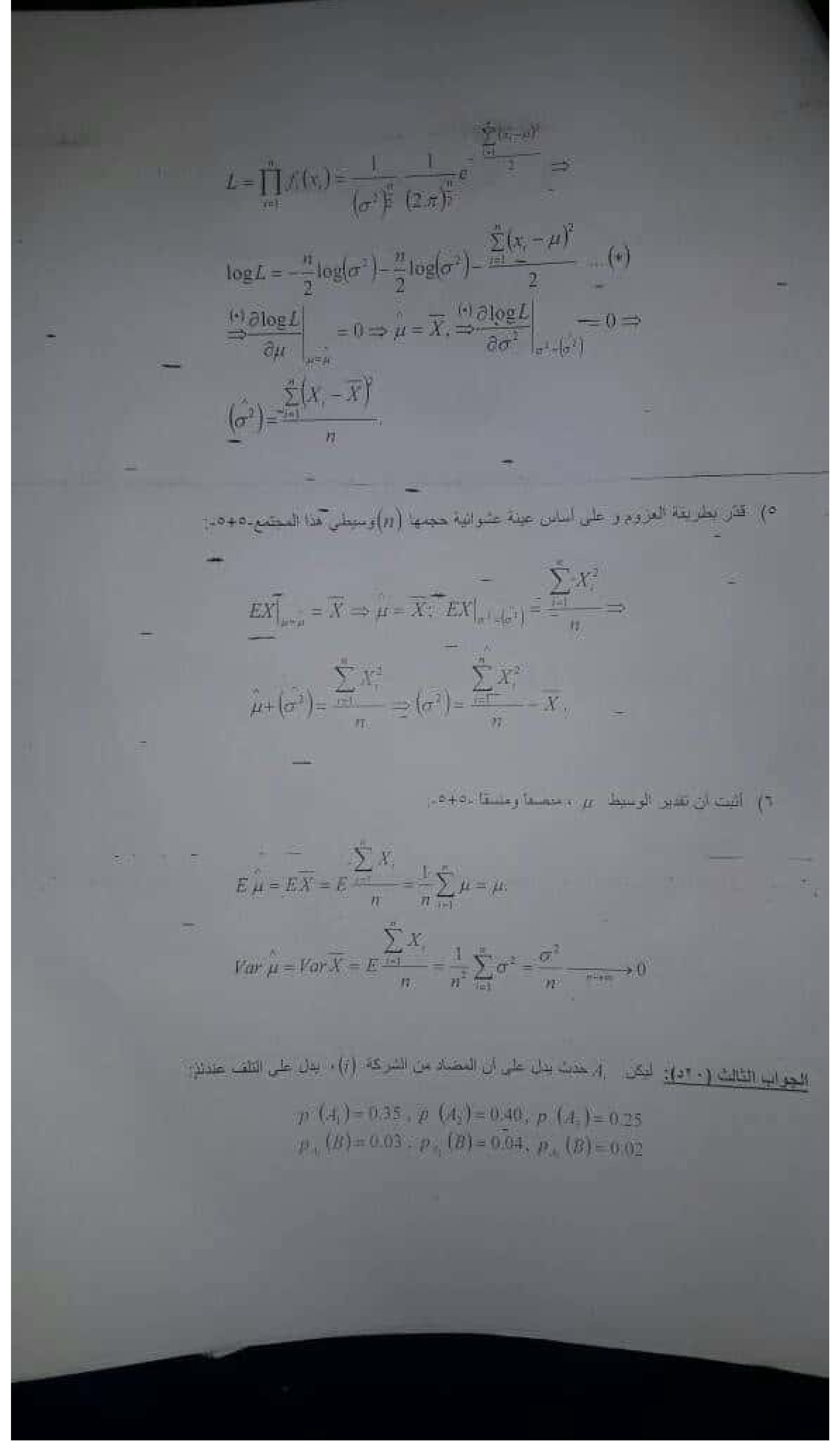
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(t^2)}{2}} \left(\sqrt{2\pi}\right) = e^{\frac{(t^2)}{2}}$$

الجواب الثاني (٣٠د):

ليكن لدينا مجتمع طبيعي وسيطاه σ^2 ، μ حيث أن:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} \; ; x \in \mathbf{R}$$

١) قدّر بطريقة الاحتمالية العظمى على أساس عينة عشوائية حجمها (n) وسيطي هذا المجتمع. ٥+٥.



$$L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\log L=-\frac{n}{2}\log(\sigma^2)-\frac{n}{2}\log(\sigma^2)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2} \quad \ldots(*)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}\frac{\partial \log L}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=\hat{\mu}}=0 \Rightarrow \hat{\mu}=\overline{X}, \overset{(*)}{\Rightarrow}\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2}\bigg|_{\sigma^2=\hat{(\sigma^2)}}=0 \Rightarrow$$

$$\hat{(\sigma^2)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}.$$

٥) قدر بطريقة العزوم و على أساس عينة عشوائية حجمها (n) وسيطي هذا المجتمع.٥+٥د:

$$EX\big|_{\mu=\hat{\mu}}=\overline{X} \Rightarrow \hat{\mu}=\overline{X}; \; EX\big|_{\sigma^2=\hat{(\sigma^2)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n} \Rightarrow$$

$$\hat{\mu}+\hat{(\sigma^2)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n} \Rightarrow \hat{(\sigma^2)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\overline{X}.$$

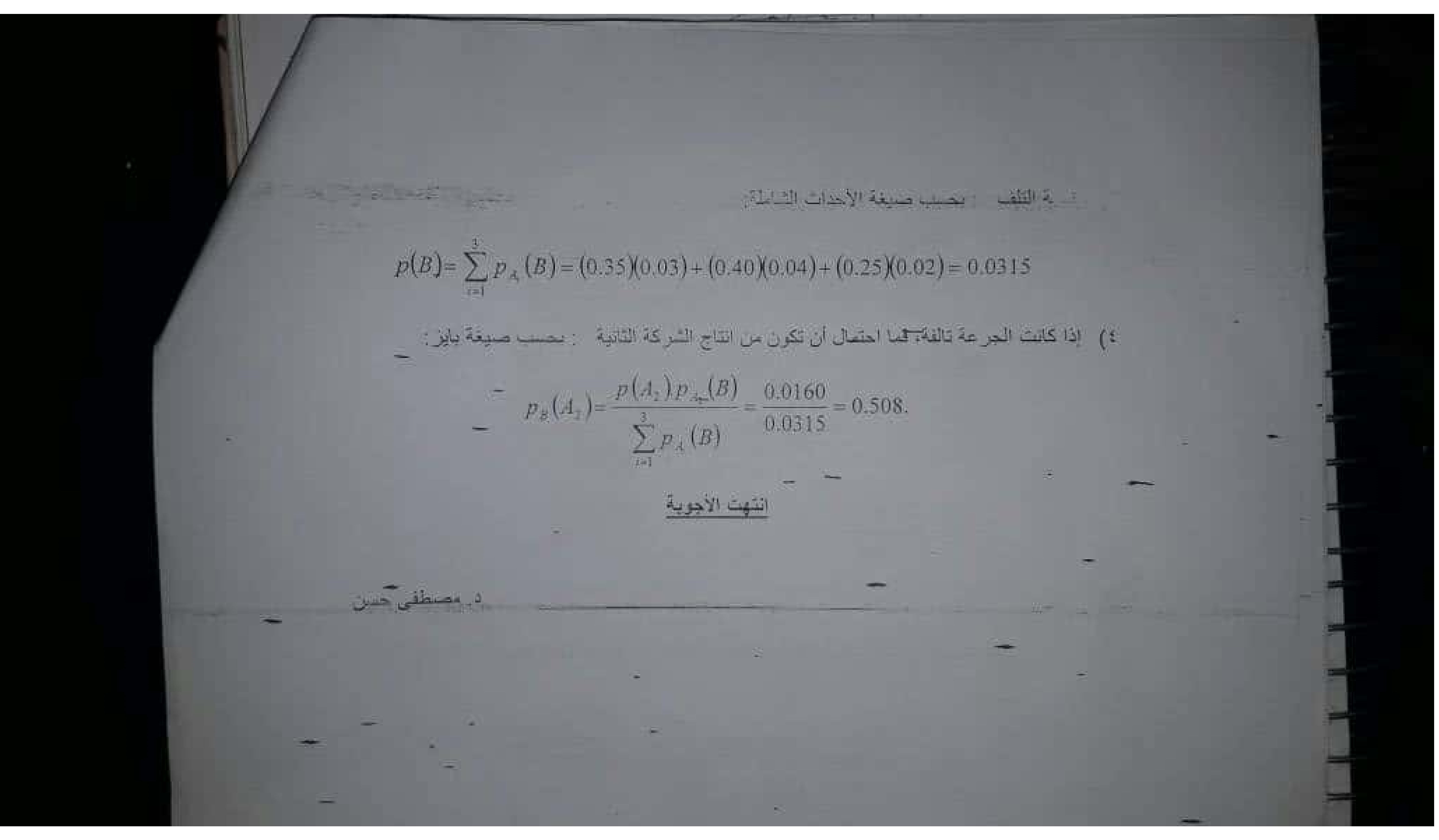
٦) أثبت أن تقدير الوسيط μ ، متحصا ومتسقا.٥+٥د:

$$E\hat{\mu}=E\overline{X}=E\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu.$$

$$Var\,\hat{\mu}=Var\,\overline{X}=E\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

الجواب الثالث (٢٠د): ليكن A_i حدث يدل على أن المضاد من الشركة (i) ، يدل على التلف عندئذ:

$$p(A_1)=0.35,\; p(A_2)=0.40,\; p(A_3)=0.25$$
$$p_{A_1}(B)=0.03,\; p_{A_2}(B)=0.04,\; p_{A_3}(B)=0.02$$



... نسبة التلف : بحسب صيغة الأحداث الشاملة:

$$p(B)=\sum_{i=1}^{3} p_{A_i}(B)=(0.35)(0.03)+(0.40)(0.04)+(0.25)(0.02)=0.0315$$

٤) إذا كانت الجرعة تالفة، فما احتمال أن تكون من انتاج الشركة الثانية : بحسب صيغة باير:

$$p_B(A_2)=\frac{p(A_2)p_{A_2}(B)}{\sum_{i=1}^{3} p_{A_i}(B)}=\frac{0.0160}{0.0315}=0.508.$$

انتهت الأجوبة

د. مصطفى حسن